

文章编号: 1000-7598-(2006) 07-1028-05

边坡稳定极限分析的单元集成法

徐千军¹, 李明元², 陆 杨¹

(1.清华大学 水沙科学与水利水电工程重点实验室, 北京 100084; 2.河南省交通规划勘察设计院, 郑州 450052)

摘 要: 提出的单元集成法为采用塑性力学上限定理分析边坡的稳定性提供了一种通用性较强的手段。它采用类似于有限元网格划分的方式离散边坡计算区域, 并设定一个机动许可的滑动机构(包括滑裂面位置和速度场, 它与网格划分方式无关), 在此滑动机构下可以很方便地计算每个单元贡献的外力功率和内能耗散率。把所有单元的能量相加就是滑坡体的总能量。然后, 根据上限定理求得安全系数, 并通过非线性数学规划方法找到最小值。对于直线滑裂面或对数螺旋滑裂面的单滑块机制, 几个典型算例说明了该方法的有效性。

关 键 词: 边坡稳定; 极限分析; 上限法; 单元; 非线性规划

中图分类号: TU 457

文献标识码: A

Upper bound limit analysis of slope stability by element integration method

XU Qian-jun¹, LI Ming-yuan², LU Yang¹

(1. Key Laboratory for River Dynamics and Hydraulic Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China;

2. Henan Provincial Communications Planning, Survey & Design Institute, Zhengzhou 450052, China)

Abstract: Element integration method provides a general approach for slope stability analysis based on the upper bound limit theorem in plasticity. Small triangle elements are used to discretize the slope media. A kinematically admissible velocity field is supposed independent with the element meshing. Work done by the body forces, surface loads, as well as internal energy dissipations within an element are convenient to obtain under such a failure mechanism. The whole energy can be calculated from the energy integration among all the elements. The safety factor can therefore be solved from the upper bound limit theorem, and its minimum value can be obtained from optimization method. For single block mechanism, such as plane slip surface, or log-spiral slip surface, the validity of this method has been verified from three typical examples.

Key words: slope stability; limit analysis; upper bound method; element; nonlinear programming

1 前 言

基于塑性上限定理的极限分析方法已被公认为是一种进行边坡稳定分析的有效方法。该法有坚实的理论基础, 利用经典塑性力学的上限定理从上限方向逼近真实解。在许多简单的问题中, 其计算结果都与工程中广泛采用的极限平衡法得到的结果相同^[1]。上限分析的关键是构造机动许可的速度场(或滑动机构), 并计算该速度场所对应的外力功率和内能耗散率。如果定义边坡强度参数的储备为其稳定安全系数, 并设定外力功率和内能耗散率相等, 则可以通过求解一个标量方程得到安全系数。安全系数的最小值可以通过对速度场的优化得到。对一

些简单的情况, 许多学者研究了其可能的滑动机构以及外力功率和内能耗散率的计算方法^[1~3], 从而给出最小安全系数的解析解, 但对于比较复杂的工程实际问题, 解析方法就无能为力了。因为对于一般的地形、地层和地下水位条件, 不管是外力功率, 还是内能耗散率, 都很难写出其数学表达式, 在这种情况下必须通过对边坡计算区域的离散, 并采用数值方法才能完成上限分析。目前主要的离散形式有单元网格划分和条柱划分两种。

有限单元法适应复杂边界条件的能力很强, 并且本身发展得比较成熟, 因此将有限单元法和数学规划法相结合求解极限载荷的上限和下限是一种非常有效的方法。Sloan, Lyamin 和 Kim 等利用这种

方法求解二维和三维地基的极限承载力问题^[4~8], 殷建华等则借助于刚体有限元和非线性数学规划来评价二维和三维边坡的稳定性^[9, 10]。这类方法能够利用有限单元法对边界适应性强的优点, 并且不需要预先假定滑动机构, 但这种方法以单元运动速度作为未知量, 对优化问题来说其计算量是很大的, 另一方面, 刚体有限元法实际上假定了单元交界面为破坏面, 这在一定程度上决定了其计算结果与网格的剖分方式的相关性。

条柱划分是极限平衡分析中最常用的离散形式^[11]。在它的启发下, Donald 和陈祖煜应用塑性力学上限定理, 从变形协调条件出发, 通过斜条分建立运动许可速度场, 根据外力功率和内能耗散率相平衡的原理确定安全系数, 采用优化条分形式来优化速度场, 从而得到最小的安全系数^[12, 13]。用这种方法还能够进行三维边坡的稳定性分析^[14, 15]。

条分法的优点是计算量小, 计算时需要输入的数据较少, 但采用条分法可能会给计算程序的开发带来一定的困难。在千差万别的实际工程问题面前, 即使是很有名的条分计算程序也很难具有象有限元分析软件那样的通用性。

本文介绍的方法也是采用单元网格划分这种离散形式, 但仍需要预先假定滑动机构, 后面的计算过程更类似于条分法, 它只适用于滑坡问题, 不像刚体有限元上限分析法那样还可以用到其它场合。它只用到了有限元法的单元划分和单元编号规则, 而没有用到其它的东西, 因此与有限元法或刚性元法是完全不同的。为了避免产生误解, 称之为“单元集成法”。

2 单元集成法的基本思想

对于一个处于极限状态的边坡, 假定坡体内存在一个塑性区 Ω^* , 塑性区内各点达到屈服, 且服从 Mohr-Coulomb 破坏准则。在这一塑性区 Ω^* 及其边界 Γ^* 上, 如果由于某一外荷载增量导致一个塑性应变速率 $\dot{\epsilon}_{ij}^*$, 那么可通过塑性力学上限定理求解相应于这一塑性变形模式的外荷载 T^* 。如果令系统的内能耗散率与外力功率相等, 即

$$\int_{\Omega^*} \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^* dv + \int_{\Gamma^*} dD_s^* = WV^* + T^* V^* \quad (1)$$

上限定理指出相应于真实塑性区 Ω 的外设荷载 T 一定小或等于 T^* 。式 (1) 中, V^* 为外荷载增量引起的相应塑性位移速率 (通常称为塑性速度); W 为塑性区的体积力, 左边第 1 项为滑裂体 Ω^* 内的内能耗散率, 第 2 项为滑裂面 Γ^* 上的内能耗散率。

因此, 极限分析上限解就是在许多可能的滑动机构 Ω^* 中寻找一个使 T^* 最小的临界滑动机构。

由于边坡通常并不受到表面荷载的作用, 人们通常也不是采用载荷因子, 而是用强度参数的储备来定义安全系数, 即定义实数 F , 使

$$c'_e = \frac{c'}{F}; \quad \tan \phi'_e = \frac{\tan \phi'}{F} \quad (2)$$

满足下面的式 (3), 其中 c' 、 ϕ' 分别为岩土体的凝聚力和内摩擦角。

$$\left[\int_{\Omega^*} \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^* dv + \int_{\Gamma^*} dD_s^* \right]_e = [WV^* + TV^*]_e \quad (3)$$

下标 e 表示其中的物理量都相应于折减后的 c'_e 和 ϕ'_e ; T 为设定的外荷, 已不再是未知量; 唯一的未知量 F 隐含于 c'_e 和 ϕ'_e 中, 可采用迭代方法求解。通过优化滑动机构可以逼近最小的安全系数。

利用塑性力学上限定理进行边坡稳定的极限分析, 需要首先构造机动许可速度场 V^* , 在滑裂体上按式 (3) 计算外力功率和内能耗散率, 并全部相加。在条分法和刚体有限元上限分析法中是通过条柱和单元的划分来构造速度场的, 同时, 条柱和单元还是进行能量积分的区域。如果把速度场的构造与条柱或单元的划分分开处理, 就是本文所提出的单元集成法。这与流形元法中积分区域与插值区域可以不一致的思想是类似的。

图 1 所示是岩土边坡常见的两种基本滑动机构: 沿平面滑动或沿曲面滑动, 实际情况往往是它们的组合。如果是沿曲面滑动, 对数螺旋面是一种最优的选择^[1]。当摩擦角为零时, 对数螺旋面可以退化为圆弧面。本文只讨论平面滑裂面和对数螺旋滑裂面这两种基本的单滑块机构, 暂不考虑多滑块机构。

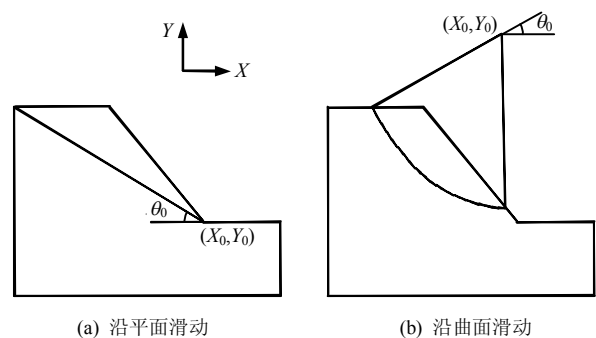


图 1 岩土边坡的两种基本滑动机构

Fig. 1 Two basic failure modes of rock and soil slopes

当边坡失稳时, 滑裂体沿滑裂面滑动。对于一个确定的滑动机构, 滑裂体内每一点的运动速度是

确定的；同时，滑裂面的位置以及滑裂面上每一点的速度也是确定的。由于所划分的单元与滑裂体相比面积很小，以单元形心处的速度乘以该单元的重量并在重力方向上投影，就是重力对该单元所作的功率，另一方面每个通过滑裂面的单元会与滑裂面交出一条“微线段”，这条微线段处的速度与该微线段长度以及凝聚力的乘积在该微线段方向上的投影就是该微线段上的内能耗散率。对所有单元完成上述计算后，把每个单元上的外力功率和内能耗散率全部相加就得到了整个滑裂体的外力功率和内能耗散率。令外力功率和内能耗散率相等，则可根据上限定理求得极限载荷的上限。

为了求得最小的极限载荷，需要对速度场（即滑动机构）进行优化。在本文提出的单元集成法中，划分的单元只用于能量积分，与滑动机构的构造无关。这给单元划分带来了很大的灵活性。而滑裂面位置调整以后，并不需要改变单元网格，只要求滑裂面以内的单元根据其形心位置与滑裂面位置相对关系的变化而把速度方向作出相应变化即可。按照这个思想，在进行程序开发时只需要完成对一个形状简单的单元（三角形或四边形单元）的操作，再对单元编号循环，就可以完成对整个滑裂体的计算了。与条分法上限分析程序相比，其开发难度大大降低，而通用性则大大增加了。

3 对滑裂面的描述

对单滑块的滑动机构，滑裂面可由 X_0 、 Y_0 和 θ_0 确定。对平面滑裂面， (X_0, Y_0) 为平面上任一点， θ_0 为平面倾角；对螺旋滑裂面， (X_0, Y_0) 为旋转中心， θ_0 为初始旋转角。按图 1 所示建立直角坐标系，平面滑裂面的方程为

$$Y = Y_0 - \tan(\theta_0)(X - X_0) \quad (4)$$

对于螺旋滑裂面，在以旋转中心为原点的极坐标系中，滑裂面上任意一点的旋转半径为

$$R = R_0 \exp[(\theta - \theta_0) \tan \phi] \quad (5)$$

式中 ϕ 为该点处材料的内摩擦角； θ 为该点处的旋转角； R_0 为初始旋转半径。当 X_0 、 Y_0 和 θ_0 确定后， R_0 是确定的。在直角坐标系下滑裂面的方程为

$$X = X_0 - R \cos \theta; \quad Y = Y_0 - R \sin \theta \quad (6)$$

滑裂面方程确定后，根据它与一个单元的相对位置判断该单元是否处于滑裂体内，决定是否需要计算该单元的外力功率，亦可判断它与一个单元是

否有交点。若有交点则可以给出交点坐标，并计算该单元对内能耗散率的贡献。

从式 (5) 可以看出，当螺旋滑裂面通过内摩擦角不同的两个地层时，其旋转半径会发生突变，因而滑裂面在此处会发生偏转。Michalowski 曾对此问题进行过专门讨论^[16]。在单元集成法中，由于单元很小，而且每个单元都可以赋予特定的土性参数，因此，设定 X_0 、 Y_0 和 θ_0 以后滑裂面在穿过不同地层时的偏转可由对数螺旋线方程自动体现，而且也不会给程序计算带来任何麻烦。

4 对孔隙水压力的考虑

孔隙水压力是边坡稳定性分析中必须考虑的一个重要因素。这里采取与 Michalowski 类似的处理方法^[3]，将孔隙水压力作为外力做功出现在能量平衡方程中，求解边坡稳定的上限解。具体计算时，假定流场的等势线铅直，滑裂面上某点处的孔隙水压力与滑裂面在该点处的法线方向一致，其水头值等于该点至浸润线与该点至坡外水位的铅直距离之差。

5 算例

根据以上讨论的方法，笔者编制了能够进行二维边坡稳定性分析的程序 ULCEI。本文通过 Chen 给出的 3 个有解析解的算例^[1]对该方法及程序的有效性进行了验证。

5.1 直立边坡

考察图 2 所示的均质直立边坡。土体天然重度 $\gamma = 19 \text{ kN/m}^3$ ，饱和重度 $\gamma_{\text{sat}} = 20.4 \text{ kN/m}^3$ ，内摩擦角 $\phi = 30^\circ$ ，黏聚力 $c = 15 \text{ kPa}$ 。

按文[1]中给出的计算公式，在坡内无水的情况下直线滑裂面和对数螺旋滑裂面两种滑动机构下的临界高度分别为 4.51 m 和 4.32 m（即在相应的坡高下安全系数为 1.00）。如果采用与解析解相同的滑裂面参数，ULCEI 的计算结果是：坡高 4.51 m 的直立边坡在平面滑裂面的滑动机构下安全系数为 1.006，坡高 4.32 m 的直立边坡在螺旋滑裂面的破坏模式下安全系数为 1.006，与解析解的相对误差均为 0.6%。

如果地下水位在坡顶，而坡外无水，文[17]得出其在平面滑裂面的滑动机构下的临界高度为 2.60 m。ULCEI 的计算结果是，在此坡高下的安全系数为 1.005，与解析解的相对误差为 0.5%。

对于一个坡高 5.5 m 的直立边坡，坡内无水， $\gamma = 19 \text{ kN/m}^3$ ， $c = 0$ ， $\phi = 20^\circ$ 。按文[1]中给出的

计算公式, 在平面滑裂面的破坏模式下, 其主动土压力为 140.897 kN。ULCEI 的计算结果是, 在此条件下的安全系数为 0.995, 与解析解的相对误差为 0.5 %。

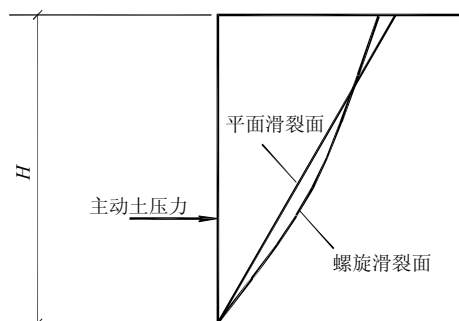


图2 均质直立边坡
Fig.2 A homogeneous vertical slope

5.2 有坡角的斜边坡

考察图 3 所示的均质、坡角为 60° 的斜边坡。土体 $\gamma = 19 \text{ kN/m}^3$, $\gamma_{\text{sat}} = 20.4 \text{ kN/m}^3$, $\phi = 20^\circ$, $c = 15 \text{ kPa}$ 。若坡内无水, 按文[1]中给出的计算图表, 在对数螺旋滑裂面的滑动机构下, 临界高度为 8.526 m。在此条件下, ULCEI 计算的安全系数为 0.979, 与解析解的相对误差为 2.1 %。但由于文[1]对这个算例没有给出滑裂面的参数值, 而且其临界高度的值也是以曲线图的形式给出的, 没有准确的数值, 所以不能由此断定单元集成法对斜边坡问题的计算精度会有所降低。

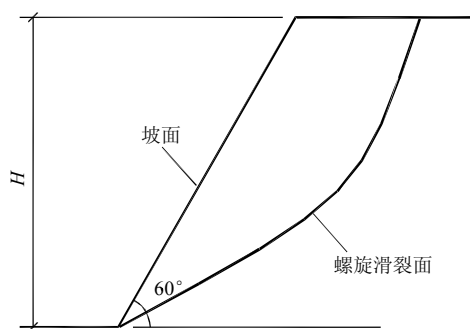


图3 均质有坡角的边坡
Fig.3 A homogeneous dip slope

5.3 滑裂面通过斜边坡坡趾下方的滑动机构

当内摩擦角和坡角都较小时, 滑裂面可能通过坡趾下方, 如图 4 所示。其坡角为 15° , 土体 $\gamma = 19 \text{ kN/m}^3$, $\gamma_{\text{sat}} = 20.4 \text{ kN/m}^3$, $\phi = 5^\circ$, $c = 15 \text{ kPa}$ 。若坡内无水, 按文[1]中给出的计算图表, 在对数螺旋滑裂面的滑动机构下临界高度为 11.353 m。在此条件下 ULCEI 计算的安全系数为 1.001, 与解析解

的相对误差为 0.1 %。对这个算例, 文[1]也没有给出滑裂面的参数值, 而且其临界高度的值也是以曲线图的形式给出的, 没有准确的数值。

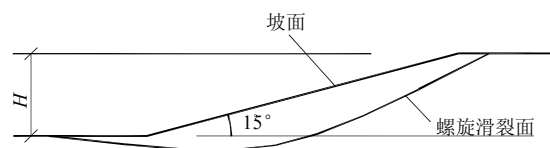


图4 滑裂面通过斜边坡坡趾下方的滑动机构
Fig.4 A homogeneous dip slope with the slip surface across the toe level

6 结 语

本文提出的单元集成法可用于边坡稳定性的上限分析, 其主要特点是单元网格只用于能量积分, 与滑动机构的构造无关。与优化变量数目较大的刚体有限元上限分析方法以及应用有限单元法进行上限分析的方法相比, 本文方法具有更为简单有效的优点。与条分法相比, 单元集成法的计算时间稍长 (但一次计算的时间差别不明显), 且需要用户输入边坡计算区域的单元剖分信息, 而换来的是积分计算的精细、程序开发的简化以及通用性的提高。尤其是在计算机软硬件水平高度发展、有限元分析技术广泛普及的今天, 许多工程师都熟悉有限元的网格划分和数据格式, 并且手头都有功能强大的有限元前处理软件 (如 ANSYS), 可以非常容易地准备一个有限元网格。在这种情况下, 单元集成法的上述缺点就不算突出了。

为了考察单元集成法的有效性, 本文只同有理论解的几个简单例子作了比较, 但它是一种基于单元离散方式的计算方法, 与有限元一样, 能适应复杂的边界和材料分区, 因此对复杂的算例也是同样有效的。

本文只考虑了平面滑裂面和螺旋滑裂面两种基本的单滑块滑动机构, 但这种方法可以很容易地推广到两滑块或三滑块的情况。对于三维问题, 它也是适用的, 而且推广的难度并不大。

参 考 文 献

- [1] Chen W F. Limit Analysis and Soil Plasticity[M]. New York: Elsevier Scientific Publishing Co., 1975.
- [2] Chen W F, Liu X L. Limit Analysis in Soil Mechanics [M]. New York: Elsevier Scientific Publishing Co., 1990.
- [3] Michalowski R L. Slope stability analysis: a kinematical approach[J]. *Geotechnique*, 1995, 45: 283—293.

- [4] Sloan S W. Lower bound limit analysis using finite elements and linear programming[J]. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 1988, 12: 61—77.
- [5] Sloan S W. Upper bound limit analysis using finite elements and linear programming[J]. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 1989, 13: 263—282.
- [6] Sloan S W, Kleeman P W. Upper bound limit analysis using discontinuous velocity fields[J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 1995, 127: 293—314.
- [7] Lyamin A V, Sloan S W. Upper bound limit analysis using linear finite elements and non-linear programming[J]. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 2002, 26: 181—216.
- [8] Kim J, Salgado R, Yu H S. Limit analysis of soil slopes subjected to pore-water pressures[J]. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, ASCE, 1999, 125 (1): 49—58.
- [9] 殷建华, 陈健, 李焯芬. 岩土边坡稳定性的刚体有限元上限分析法[J]. **岩石力学与工程学报**, 2004, 23(6): 898—905.
- YIN Jian-hua, CHEN Jian, LEE Chack-fan. Upper limit analysis of stability of rock and soil slopes using rigid finite elements[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2004, 23(6): 898—905.
- [10] Chen J, Yin J H, Lee C F. Upper bound limit analysis of slope stability using rigid finite elements and non-linear programming[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 2002, 40(4): 742—752.
- [11] 陈祖煜. 土质边坡稳定分析——原理、方法、程序[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2003.
- [12] Donald I, Chen Z Y. Slope stability analysis by the upper bound approach: fundamentals and methods[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 1997, 34(6): 853—862.
- [13] Chen Z Y. The limit analysis for slopes: theory, methods and applications[A]. **Proceedings of the International Symposium on Slope Stability Engineering**[C]. Rotterdam: Balema, 1999. 15—29.
- [14] Chen Z Y, Wang X G, Haberfield C, et al. A three-dimensional slope stability analysis method using the upper bound theorem (part I): theory and methods[J]. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, 2001, 38: 369—378.
- [15] Chen Z Y, Wang J, Wang Y J, et al. A three-dimensional slope stability analysis method using the upper bound theorem (part II): numerical approaches, applications and extensions[J]. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, 2001, 38: 379—397.
- [16] Michalowski R L. Bearing capacity of footing over two-layer foundation soils[J]. **Journal of Geotechnical Engineering**, 1995, 121: 421—428.
- [17] 陆杨, 徐千军. 交变载荷作用下边坡的安定性分析[J]. **岩土力学**, 2004, 25(11): 1 693—1 697.
- LU Yang, XU Qian-jun. Shakedown analysis of slopes under to alternate loads[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2004, 25(11): 1 693—1 697.

美国《剑桥科学文摘》开始收录《岩土力学》

美国《剑桥科学文摘》(CSA)开始收录《岩土力学》。CSA 是美国文献出版公司(是美国著名的科技信息出版公司),总部在美国马里兰州的 Bethesda, Cambridge 地方,非英国剑桥,目前为全世界 1500 多家机构提供服务(本次在我国收录有 65 种期刊)。从 2006 年起《岩土力学》开始向该机构寄刊,这是继 EI 检索机构收录我刊后又一家国际机构对我刊收录,是《岩土力学》走向世界又一途径。剑桥科学文摘(CSA)是美国 Cambridge Scientific Abstracts 公司出版发行、基于网络服务的文献信息检索系统,包含 70 多个数据库。覆盖的学科范围包括:生命科学、水科学与海洋学、环境科学、计算机科学、材料科学以及社会科学。收录的文献类型为:期刊论文;图书;会议论文;科技报告;学位论文;专著等。收录的时间范围是 1960 年至今。检索结果为文献的题录文摘信息。该系统特点如下:(1)每日更新,帮助用户及时了解最新的研究成果;(2)可同时检索多个数据库及相关的因特网资源;(3)可保存、打印、Email 检索结果;(4)可记录检索历史,可为用户保存检索策略(半年时间内);(5)为管理者提供数据库使用报告 and 用户登录记录。剑桥科学文摘数据库采用 IP 地址控制,用户访问时无需加装任何软件,任何一台接入校园网的计算机均可通过 Web 方式连接到设于清华大学的镜像服务器进行检索,没有并发用户数限制,不需要用户名和密码。网址是 <http://csa.tsinghua.edu.cn/htbin/dbmrg.cgi?username=cau01&access=cau0101>。